

TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS CURVOS

Henrique Cabral, Maria Carvalho

Departamento de Matemática & Centro de Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto – FCUP
Rua do Campo Alegre, 687, 4169-007 Porto
e-mail: mpcarval@fc.up.pt

Resumo: Um triângulo diz-se pitagórico se for rectângulo e os seus lados tiverem comprimentos inteiros. No plano, a lista completa deste tipo de triângulos é conhecida desde Euclides. Neste texto, consideraremos outras superfícies de curvatura constante onde procuraremos triângulos com estas propriedades.

Abstract: A Pythagorean triangle is a right angled triangle whose sides have integer lengths. On the Euclidean plane they are completely known, after Euclid's classification. In this note, we discuss the existence of such triangles on surfaces of constant Gaussian curvature.

palavras-chave: Triângulo pitagórico; esfera; plano hiperbólico.

keywords: Pythagorean triangle; sphere; hyperbolic plane.

1 Introdução

Os ternos de números naturais a, b, c tais que $a^2 + b^2 = c^2$ foram tema de apurado estudo na Grécia Antiga, sendo desde então conhecidas várias fórmulas geradoras, inúmeras propriedades e uma descrição completa [2]. Podem obter-se, por exemplo, através da projecção estereográfica da circunferência unitária e da detecção dos pontos de intersecção desta curva com $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. O Teorema de Pitágoras e as noções de triângulo, ângulo recto ou lado de comprimento inteiro podem generalizar-se para mundos em que a medição de distâncias e a geometria não são as euclidianas. Consideraremos neste texto o caso particular das superfícies de curvatura Gaussiana constante (positiva ou negativa), isto é, esferas ou planos hiperbólicos. Como veremos, em quase todas estas superfícies não há triângulos pitagóricos ou, quando há, só existe um número finito deles.

2 Esfera

Uma linha recta que une dois pontos no plano é o caminho entre eles que minimiza a distância. Na geometria esférica, as geodésicas são arcos de meridiano, sendo um meridiano o resultado da intersecção da esfera com um plano que passa pelo seu centro. Por isso, em qualquer esfera há pares de pontos com mais do que uma curva a uni-los e minimizando a distância entre eles, e não há rectas paralelas.

Um triângulo plano é a região limitada do plano cujo bordo é formado por três linhas rectas que se intersectam em três pontos não-colineares. Esta definição não se ajusta à esfera porque, em geral, não determina os ângulos (ou seja, a área) do triângulo. Fixemos três pontos não colineares numa esfera e, por cada par, tracemos uma linha recta. Feito isto, criamos dois triângulos; se forem distintos, escolheremos o que engloba menos área na esfera. Definimos ângulo entre dois meridianos (ou arcos de meridiano) como sendo o ângulo de $[0, \pi]$ formado pelos planos que os geram. Desse modo, a soma dos três ângulos de um triângulo esférico é um valor que se situa em $]\pi, 3\pi[$, e o comprimento de cada lado é menor ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Embora possamos resistir a aceitar a curva da Figura 1 como um triângulo, certo é que ela verifica esta definição. Contudo, como o comprimento de um dos lados é a soma dos comprimentos dos outros dois, diremos que se trata de um caso *degenerado*.

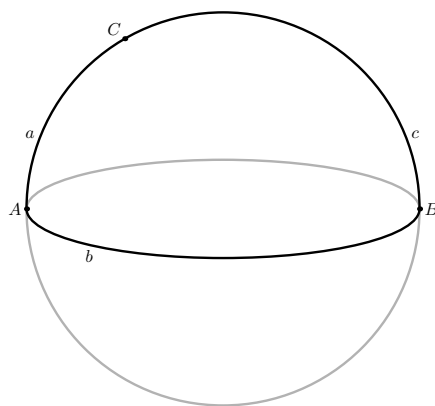


Figura 1: Triângulo degenerado: $a + c = b$.

Um triângulo rectângulo esférico é um triângulo com um dos ângulos recto. A Figura 2 mostra um exemplo, isósceles e de lados inteiros a , b e a . Variando

b , obtemos outros (Figura 3); em particular, quando $b = 2a$, chegamos a um triângulo degenerado.

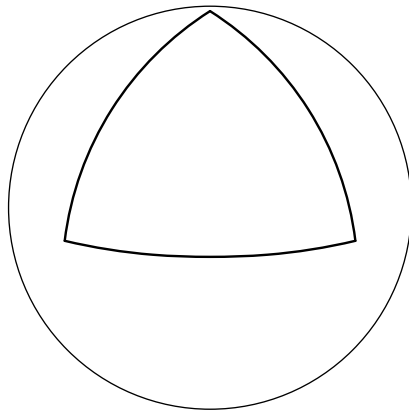


Figura 2: Triângulo isósceles rectângulo.

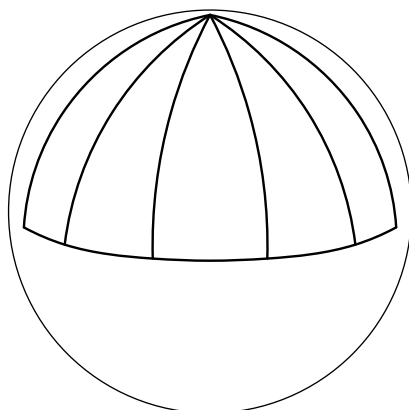


Figura 3: Triângulos rectângulos com dois ângulos de 90° .

Sobre os triângulos rectângulos esféricos, temos a seguinte versão do Teorema de Pitágoras [1]:

Teorema 1 *Dado um triângulo rectângulo, de catetos a, b e hipotenusa c , numa esfera de raio R , tem-se:*

$$\cos\left(\frac{c}{R}\right) = \cos\left(\frac{a}{R}\right) \cos\left(\frac{b}{R}\right). \quad (1)$$

O que deduziremos nesta secção é consequência directa desta igualdade.

Exemplo 1 Um dos triângulos pitagóricos no plano mais famosos tem catetos 3, 4 e hipotenusa 5. Existe alguma esfera onde possamos traçar um triângulo rectângulo com estes lados? Para responder a esta questão, voltemos ao Teorema 1, fixando $a = 3$, $b = 4$ e deixando como incógnitas tanto a hipotenusa c como o raio da esfera R . Resolvendo a igualdade em ordem a c , a hipotenusa reescreve-se como uma função do raio $R > 0$ cujo gráfico está desenhado na Figura 4:

$$\mathcal{C}_{34}(R) = R \arccos \left(\cos \frac{3}{R} \cos \frac{4}{R} \right).$$

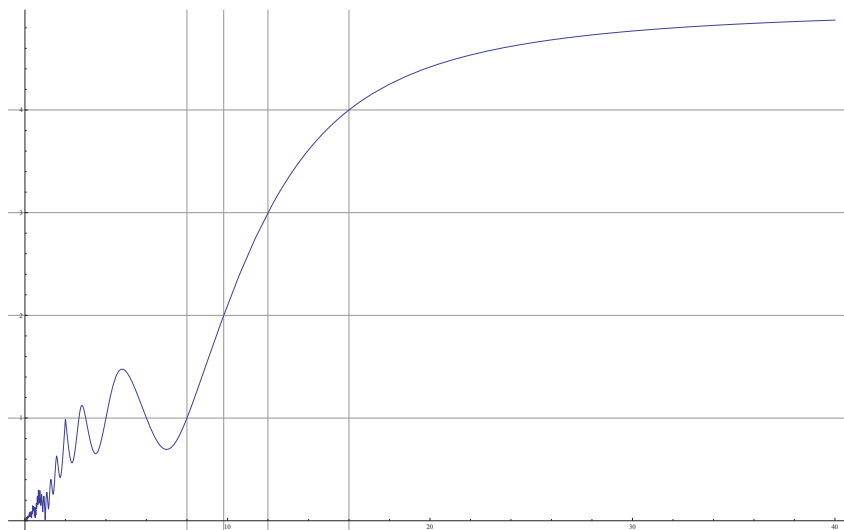


Figura 4: Gráfico de \mathcal{C}_{34} ; a incógnita é o perímetro $2\pi R$.

Note-se que, neste caso, só interessam os valores de $R \geq \frac{4}{\pi}$ porque, numa esfera de raio R , a geodésica mais longa mede πR . Quando $R = \frac{4}{\pi}$, a hipotenusa c mede 1, o que corresponde a um triângulo degenerado, com os lados de comprimentos 3 e 1 a formar um ângulo igual π . Além disso, as propriedades da função \mathcal{C}_{34} indicam que não existe nenhuma esfera que contenha um triângulo rectângulo com catetos 3 e 4 e hipotenusa 5: de facto, a linha $y = 5$ é uma assíntota do gráfico de \mathcal{C}_{34} , que se situa sempre abaixo dessa linha.

Podemos, todavia, repetir o procedimento anterior com $a = 3$, $b = 5$ e $a = 4$, $b = 5$. Obtemos dois novos gráficos, os das Figuras 5 e 6. Eles mostram que há duas esferas que contêm um rectângulo de dimensões $(3, 4, 5)$:

um tem catetos de comprimentos 3, 5 e hipotenusa 4; o outro tem catetos 4, 5 e hipotenusa 3.

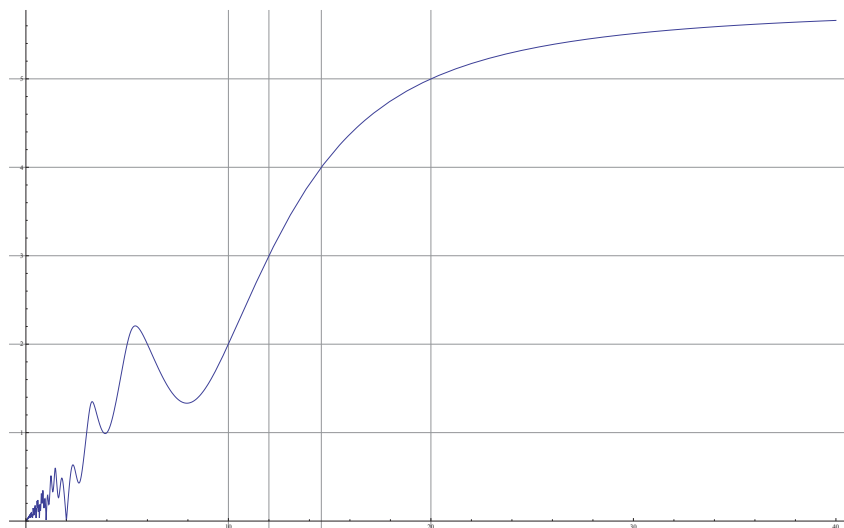


Figura 5: Gráfico de \mathcal{C}_{35} ; a incógnita é o perímetro $2\pi R$.

Estranha-se que a hipotenusa seja mais curta que os catetos, mas essa é a primeira novidade que descobrimos neste contexto quando abandonamos o mundo plano.

2.1 Catetos a e b fixos, sendo $a \leq b$

Em geral, pelo método descrito acima, podemos determinar se um triângulo pitagórico com catetos fixados existe em alguma esfera. Dado um par de naturais (a, b) , com $a \leq b$, consideremos a função $\mathcal{C}_{ab}(R) : [\frac{b}{\pi}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathcal{C}_{ab}(R) = R \arccos \left(\cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} \right).$$

Observe-se que, para qualquer $b \in \mathbb{N}$, a esfera de raio $R = \frac{b}{\pi}$ contém o triângulo pitagórico (degenerado) com catetos a, b e hipotenusa $b - a$, sendo π o valor do ângulo entre os lados a e $b - a$. Isto deve-se à igualdade

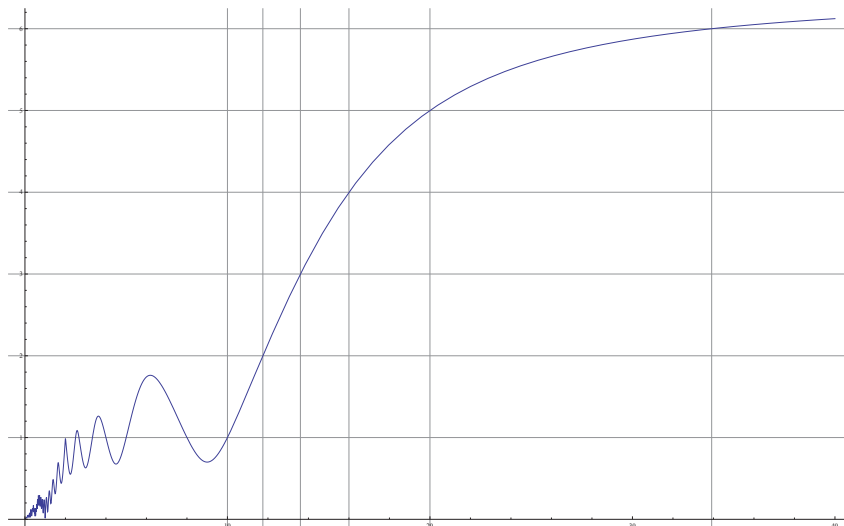


Figura 6: Gráfico de \mathcal{C}_{45} ; a incógnita é o perímetro $2\pi R$.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{ab}\left(\frac{b}{\pi}\right) &= \frac{b}{\pi} \arccos\left(\cos \frac{a}{\frac{b}{\pi}} \cos \frac{b}{\frac{b}{\pi}}\right) \\
 &= \frac{b}{\pi} \arccos\left(\cos \frac{a}{b}\pi \cos \pi\right) \\
 &= \frac{b}{\pi} \arccos\left(\cos\left(\pi - \frac{a}{b}\pi\right)\right) \\
 &= \frac{b}{\pi}\left(\pi - \frac{a}{b}\pi\right) = b - a.
 \end{aligned}$$

Além disso, se $R \geq \frac{b}{\pi}$, então $\mathcal{C}_{ab}(R) \geq b - a$, caso contrário teríamos

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{\mathcal{C}_{ab}(R)}{R} &> \cos \frac{b-a}{R} \\
 &= \left(\cos \frac{b}{R} \cos \frac{a}{R} + \sin \frac{b}{R} \sin \frac{a}{R}\right) \\
 &> \left(\cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}\right)
 \end{aligned}$$

o que contradiz o Teorema 1.

Quando R aumenta, a esfera de raio R parece-se, localmente, cada vez mais com um plano e esperamos rever aproximadamente as propriedades dos triângulos em curvatura zero. E, de facto,

$$\begin{aligned}
\lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{C}_{ab}(R) &= \lim_{R \rightarrow \infty} R \arccos \left(\cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} \right) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} R \arccos \left(\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R} \right)^2 + \dots \right] \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{R} \right)^2 + \dots \right] \right) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} R \arccos \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{R} \right)^2 + \dots \right) \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} R \arccos \left(\cos \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{R} \right) \\
&= \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}$$

que, sabemos, é o único valor admissível para a hipotenusa de um triângulo rectângulo no plano com catetos a e b .

A função \mathcal{C}_{ab} é derivável, sendo a derivada dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}'_{ab}(R) &= \arccos \left(\cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} \right) - \frac{a \sin \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} + b \cos \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R}}{R \sqrt{1 - \left(\cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} \right)^2}} \\
&= \frac{c}{R} - \frac{a \sin \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R} + b \cos \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R}}{R \sin \frac{c}{R}}
\end{aligned}$$

aplicação que verifica $\mathcal{C}'_{ab} \left(\frac{b}{\pi} \right) = \pi$ e é positiva no intervalo $\left[\frac{b}{\pi}, +\infty \right[$ (logo, neste intervalo, \mathcal{C}_{ab} é estritamente crescente). Destas propriedades de \mathcal{C}_{ab} deduzimos a proposição seguinte.

Proposição 2 *Para $R > 0$, designemos por \mathcal{S}_R a esfera de raio R .*

(i) *A hipotenusa c de um triângulo pitagórico esférico com catetos a e b verifica*

$$b - a \leq c < \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(2i) *Fixados $a, b, c \in \mathbb{N}$, o conjunto*

$$\{R > 0 : \mathcal{S}_R \text{ contém um triângulo pitagórico com lados } a, b, c\}$$

tem quando muito três elementos.

(3i) *O conjunto $\{R > 0 : \mathcal{S}_R \text{ contém um triângulo pitagórico}\}$ é numerável.*

Consequentemente:

Corolário 3

- (i) Não existe esfera com um triângulo pitagórico de lados 1, 3, 5.
- (2i) Existe uma única esfera, a de raio $R = \frac{2}{\pi}$, que contém um triângulo pitagórico de lados 1, 1, 1 (cujos ângulos são todos iguais a $\frac{\pi}{2}$). O mesmo vale para o triângulo de catetos 1, 2 e hipotenusa 1 (cujos ângulos são $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ e π).
- (3i) Há precisamente duas esferas com um triângulo pitagórico de lados 3, 4, 5, de hipotenusa 4 e 3, respectivamente.
- (4i) Há três esferas com um triângulo pitagórico de lados 4, 5, 6, com hipotenusas 4, 5 e 6, respectivamente.

2.2 R fixo

A equação (1) admite outra interpretação: em vez de descrevermos os triângulos pitagóricos esféricos com lados fixados, podemos fixar uma esfera e procurar os triângulos pitagóricos que ela contém. Naturalmente, uma condição necessária para podermos traçar um triângulo pitagórico numa esfera de raio R é que $R \geq \frac{1}{\pi}$. Isto não é, porém, suficiente: a presença do menor triângulo pitagórico, o de lados 1, 1, 1, já obriga R a verificar a condição

$$\cos \frac{1}{R} = \cos \frac{1}{R} \cos \frac{1}{R}$$

que tem uma única solução, $R = \frac{2}{\pi}$. E, portanto, se uma esfera de raio R contém um triângulo pitagórico, então $R \geq \frac{2}{\pi}$. Como veremos, mesmo esta minoração não basta: nem todas as esferas de raio suficientemente grande admitem triângulos pitagóricos.

2.2.1 $R = \frac{n}{\pi}$, $n \in \mathbb{N}$

Começamos por considerar esferas de raio $R = \frac{n}{\pi}$, onde $n \in \mathbb{N}$. Num tal mundo, o maior lado possível de um triângulo é n . Para $n = 1$, isto é, quando $R = \frac{1}{\pi}$, não há triângulos pitagóricos na esfera com este raio. Pelo contrário, para $n > 1$, é fácil encontrar na esfera de raio $R = \frac{n}{\pi}$ pelo menos um triângulo pitagórico, o degenerado de catetos 1, n e hipotenusa $n - 1$ (ou, equivalentemente, de catetos $n - 1$, n e hipotenusa 1). Mas queremos uma estratégia para os encontrar a todos.

1º caso: O maior lado, com comprimento n , é a hipotenusa.

A equação

$$\cos \frac{n}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}$$

é equivalente a

$$\cos \pi = \cos \frac{a}{n} \pi \cos \frac{b}{n} \pi$$

a qual, como $a \leq b$ e $\frac{a}{n}\pi, \frac{b}{n}\pi$ estão ambos em $]0, \pi]$, implica que $\cos \frac{a}{n}\pi = 1$ (e $\cos \frac{b}{n}\pi = -1$). Por isso, $\frac{a}{n}\pi = 0$, um valor proibido no nosso contexto.

Conclusão: numa esfera de raio $\frac{n}{\pi}$, não há triângulos pitagóricos com hipotenusa n .

2º caso: O maior lado, de comprimento n , é um cateto.

Agora a equação a resolver é

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{n}{R}$$

ou seja,

$$\cos \frac{c}{n} \pi = -\cos \frac{a}{n} \pi.$$

Como $\frac{c}{n}\pi$ e $\frac{a}{n}\pi$ pertencem a $]0, \pi]$, esta igualdade implica que

$$\frac{c}{n} \pi = \pi - \frac{a}{n} \pi$$

isto é,

$$a + c = n.$$

O que nos permite construir a seguinte lista de triângulos pitagóricos, todos com um cateto de comprimento n , degenerados e com ângulos $\frac{\pi}{2}$, π e $\frac{\pi}{2}$:

n par

<i>Catetos</i>	<i>Hipotenusa</i>
1, n	$n - 1$
2, n	$n - 2$
\dots	\dots
$\frac{n}{2}, n$	$\frac{n}{2}$
<i>Total</i>	$\frac{n}{2}$ triângulos

(2)

n ímpar

<i>Catetos</i>	<i>Hipotenusa</i>
1, n	$n - 1$
2, n	$n - 2$
\dots	\dots
$\frac{n-1}{2}, n$	$\frac{n+1}{2}$
<i>Total</i>	$\frac{n-1}{2}$ triângulos

(3)

[Note-se que, para $t \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$, se n é par, ou $t \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}$ se n é ímpar, o triângulo de lados $t, n, n-t$ é o mesmo que o de lados $n-t, n, t$.]

Generalizemos: suponhamos que o maior lado tem comprimento $n - \ell$, com $1 \leq \ell \leq n - 1$.

3º caso: O maior lado, com comprimento $n - \ell$, é a hipotenusa.

A equação que descreve um tal triângulo rectângulo é

$$\cos \frac{n - \ell}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R},$$

ou seja,

$$-\cos \frac{\ell}{n} \pi = \cos \frac{a}{n} \pi \cos \frac{b}{n} \pi.$$

Se $\cos \frac{\ell}{n} \pi = 0$, então $\ell = \frac{n}{2}$ (logo n é par) e tem-se $\cos \frac{a}{n} \pi = 0$ (isto é, $a = \frac{n}{2}$) ou $\cos \frac{b}{n} \pi = 0$ (isto é, $b = \frac{n}{2}$). Como, por hipótese, $a \leq b$, estas condições correspondem aos ternos

$$[\mathbf{n \text{ par}}] : a \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}, b = \frac{n}{2}, c = \frac{n}{2}. \quad (4)$$

Se $\cos \frac{\ell}{n} \pi \neq 0$, então $\cos \frac{a}{n} \pi$ e $\cos \frac{b}{n} \pi$ não se anulam. Estas condições em simultâneo impedem que exista um triângulo rectângulo de lados a, b e hipotenusa $n - \ell$, uma vez que:

- Se $a = \ell$ (ou $b = \ell$), então, como $\cos \frac{\ell}{n} \pi \neq 0$, a equação $-\cos \frac{\ell}{n} \pi = \cos \frac{a}{n} \pi \cos \frac{b}{n} \pi$ é equivalente a $\cos \frac{b}{n} \pi = -1$ (respectivamente $\cos \frac{a}{n} \pi = -1$), isto é, $b = n$ (respectivamente $a = n$), o que contradiz o facto de o maior lado ter comprimento $n - \ell$ e $\ell > 0$.

- Se $b = n - \ell$, então, como $\cos \frac{n-\ell}{n}\pi \neq 0$ (caso contrário, $\ell = \frac{n}{2}$ e $\cos \frac{\ell}{n}\pi = 0$), a equação $\cos \frac{n-\ell}{n}\pi = \cos \frac{a}{n}\pi \cos \frac{b}{n}\pi$ é equivalente a $\cos \frac{a}{n}\pi = 1$, ou seja, $a = 0$, valor não permitido.
- Se $a \neq \ell$, $b \neq \ell$, $b \neq n - \ell$ e $\ell < \frac{n}{2}$, então $\frac{n-\ell}{n}\pi$ e $\frac{b}{n}\pi$ pertencem ambos a $] \frac{\pi}{2}, \pi[$ (caso contrário, teríamos $\cos \frac{a}{n}\pi \cos \frac{b}{n}\pi > 0$ enquanto que $\cos \frac{n-\ell}{n}\pi < 0$). Além disso, $\frac{n-\ell}{n}\pi > \frac{b}{n}\pi$ e $\frac{a}{n}\pi$ está em $]0, \frac{\pi}{2}[$. Logo

$$\cos \frac{n-\ell}{n}\pi < \cos \frac{b}{n}\pi < \cos \frac{a}{n}\pi \cos \frac{b}{n}\pi,$$

o que contradiz a equação que descreve um triângulo pitagórico de catetos a, b e hipotenusa $n - \ell$.

- Se $a \neq \ell$, $b \neq \ell$, $b \neq n - \ell$ e $\ell > \frac{n}{2}$, então $\frac{a}{n}\pi \leq \frac{b}{n}\pi < \frac{n-\ell}{n}\pi < \frac{\pi}{2}$ e portanto $\cos \frac{n-\ell}{n}\pi$ não pode ser igual ao produto $\cos \frac{a}{n}\pi \cos \frac{b}{n}\pi$, caso contrário, como $\cos \frac{a}{n}\pi \neq 0$ e $\cos \frac{a}{n}\pi > \cos \frac{n-\ell}{n}\pi$, a igualdade implicaria que $\cos \frac{b}{n}\pi > 1$.

4º caso: O maior lado, de comprimento $n - \ell$, é um cateto.

Agora a equação que relaciona os lados do triângulo rectângulo é

$$\cos \frac{c}{R} = \cos \frac{a}{R} \cos \frac{n-\ell}{R},$$

ou seja,

$$\cos \frac{c}{n}\pi = -\cos \frac{a}{n}\pi \cos \frac{\ell}{n}\pi.$$

Se $\cos \frac{\ell}{n}\pi = 0$, então $\ell = \frac{n}{2}$ (logo n é par) e $\cos \frac{c}{n}\pi = 0$. Desse modo, a hipotenusa c tem comprimento igual ao do cateto, $\frac{n}{2}$, e redescobrimos o conjunto (4) de triângulos pitagóricos que obtivemos anteriormente para n par.

Se $\cos \frac{\ell}{n}\pi \neq 0$ (logo $\ell \neq \frac{n}{2}$), então $\cos \frac{a}{n}\pi = 0$ se e só se $\cos \frac{c}{n}\pi = 0$. E, portanto, se um destes valores se anula, concluímos que n é par, $a = c = \frac{n}{2}$ e $b = n - \ell > \frac{n}{2}$. Como, por hipótese, $a \leq b$, estas hipóteses constroem uma nova lista de triângulos pitagóricos:

$$[\mathbf{n \text{ par}}] : a = \frac{n}{2}, \quad b = n - \ell, \quad c = \frac{n}{2} \quad \text{onde } \ell \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1\}. \quad (5)$$

Se $\cos \frac{\ell}{n}\pi \neq 0$ (logo $\ell \neq \frac{n}{2}$) e $\cos \frac{a}{n}\pi \neq 0$, então $\cos \frac{c}{n}\pi \neq 0$. Mas, com estas restrições, não existe nenhum triângulo rectângulo com catetos $a, n - \ell$ e hipotenusa c porque:

- Se $\cos \frac{a}{n}\pi = \pm \cos \frac{c}{n}\pi$, então a equação $\cos \frac{c}{n}\pi = \cos \frac{a}{n}\pi \cos \frac{n-\ell}{n}\pi$ implica que $\cos \frac{n-\ell}{n}\pi = \pm 1$, e, portanto, ou $\frac{n-\ell}{n}\pi = 0$, o que não é admitido neste contexto, ou $\frac{n-\ell}{n}\pi = \pi$, o que contradiz a desigualdade $\ell \geq 1$.
- Do mesmo modo, se $\cos \frac{c}{n}\pi = \pm \cos \frac{n-\ell}{n}\pi$, então devemos ter $\cos \frac{a}{n}\pi = \pm 1$, e, portanto, ou $\frac{a}{n}\pi = 0$, o que não é aceitável no nosso contexto, ou $\frac{a}{n}\pi = \pi$, o que contradiz a hipótese de $n-\ell$, com $\ell > 0$, ser o maior lado.
- Se $\cos \frac{a}{n}\pi \neq \pm \cos \frac{c}{n}\pi$ e $\cos \frac{c}{n}\pi \neq \pm \cos \frac{n-\ell}{n}\pi$ e $\ell > \frac{n}{2}$, então os três ângulos $\frac{a}{n}\pi$, $\frac{c}{n}\pi$ e $\frac{n-\ell}{n}\pi$ pertencem a $]0, \frac{\pi}{2}[$. Consequentemente, $\cos \frac{c}{n}\pi > \cos \frac{n-\ell}{n}\pi$ e $\cos \frac{a}{n}\pi \cos \frac{n-\ell}{n}\pi < \cos \frac{n-\ell}{n}\pi < \cos \frac{c}{n}\pi$, o que, de novo, é uma contradição.
- Se $\cos \frac{a}{n}\pi \neq \pm \cos \frac{c}{n}\pi$ e $\cos \frac{c}{n}\pi \neq \pm \cos \frac{n-\ell}{n}\pi$ e $\ell < \frac{n}{2}$, então $\frac{n-\ell}{n}\pi$ pertence a $] \frac{\pi}{2}, \pi[$ e, portanto, também está neste intervalo um (e só um) dos ângulos $\frac{a}{n}\pi$ ou $\frac{c}{n}\pi$. Suponhamos que $\frac{n-\ell}{n}\pi$ e $\frac{c}{n}\pi$ estão em $] \frac{\pi}{2}, \pi[$ (o outro caso é idêntico). Podemos reescrever a equação $\cos \frac{c}{n}\pi = \cos \frac{a}{n}\pi \cos \frac{n-\ell}{n}\pi$ como

$$\cos \frac{n-c}{n}\pi = \cos \frac{a}{n}\pi \cos \frac{\ell}{n}\pi.$$

Então tem-se

$$\cos \frac{a}{n}\pi \geq \cos \frac{n-c}{n}\pi$$

caso contrário, como $\cos \frac{a}{n}\pi \neq 0$, obteríamos $\cos \frac{\ell}{n}\pi = \frac{\cos \frac{n-c}{n}\pi}{\cos \frac{a}{n}\pi} > 1$. Logo

$$a \leq n - c.$$

Analogamente,

$$\cos \frac{\ell}{n}\pi \geq \cos \frac{n-c}{n}\pi$$

caso contrário, como $\cos \frac{\ell}{n}\pi \neq 0$, concluiríamos que $\cos \frac{a}{n}\pi = \frac{\cos \frac{n-c}{n}\pi}{\cos \frac{\ell}{n}\pi} > 1$. E, portanto,

$$\ell \leq n - c.$$

Estas estimativas significam que estamos a rever o que deduzimos no 3º caso, quando supusemos que a hipotenusa era o maior lado do triângulo (agora com comprimento $n-c$). Concluimos então (veja (4))

que os únicos triângulos pitagóricos que podem existir nestas condições correspondem a n par e $n - c = \frac{n}{2}$. Mas isto contradiz a nossa hipótese de que $\cos \frac{c}{n}\pi \neq 0$.

Façamos um resumo do que acabámos de provar:

Teorema 4 *Para qualquer natural $n > 1$, são estes os triângulos pitagóricos na esfera de raio $\frac{n}{\pi}$:*

- (i) *Se $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, então a esfera tem k tais triângulos, com catetos $a \in \{1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}\}$, n e hipotenusa c , sendo $a + c = n$.*
- (i) *Se $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, então a esfera tem $3k - 1$ triângulos pitagóricos, nomeadamente:*
 - *k triângulos com catetos $a \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$, n e hipotenusa c , sendo $a + c = n$;*
 - *k triângulos isósceles com catetos $a \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$, $\frac{n}{2}$ e hipotenusa $\frac{n}{2}$;*
 - *$k - 1$ triângulos isósceles com catetos $\frac{n}{2}$, b e hipotenusa $\frac{n}{2}$, para $\frac{n}{2} + 1 \leq b \leq n - 1$.*

Por exemplo, a esfera de raio $\frac{8}{\pi}$ tem 11 triângulos pitagóricos:

<i>Catetos</i>	<i>Hipotenusa</i>	<i>Perímetro</i>
1, 8	7	16
2, 8	6	16
3, 8	5	16
4, 8	4	16
1, 4	4	9
2, 4	4	10
3, 4	4	11
4, 4	4	12
4, 5	4	13
4, 6	4	14
4, 7	4	15

enquanto que a esfera de raio $\frac{9}{\pi}$ tem 4 triângulos pitagóricos:

<i>Catetos</i>	<i>Hipotenusa</i>	<i>Perímetro</i>
1, 9	8	18
2, 9	7	18
3, 9	6	18
4, 9	5	18

Corolário 5

- (i) Para todo o real $R > 0$, a esfera de raio R tem um número finito de triângulos pitagóricos.
- (2i) Para todo o natural $N > 0$, existe uma esfera com mais do que N triângulos pitagóricos.

Prova: Dado $R > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\pi R \leq n$. Logo os triângulos pitagóricos que podemos encontrar na esfera de raio R têm lados cujos comprimentos não podem exceder n . E, portanto, o número de ternos pitagóricos a, b, c admissíveis numa tal esfera é finito. Por outro lado, para cada natural $N > 0$, seja k um natural maior do que $\frac{N+1}{3}$. Então, como vimos, a esfera de raio $R = \frac{2k}{\pi}$ tem $3k - 1 > N$ triângulos pitagóricos distintos. \square

2.2.2 $R = \frac{\alpha}{\pi}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$

Podemos agora completar a descrição dos triângulos pitagóricos em esferas de raio R tal que πR é racional.

Corolário 6 Se $\alpha \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{N}$, não existem triângulos pitagóricos na esfera de raio $\frac{\alpha}{\pi}$.

Prova: Fixemos um racional α , dado pela fracção irredutível $\frac{p}{q}$, sendo $q > 1$. Como observámos anteriormente, basta considerar naturais p e q tais que $\frac{p}{q} > 1$. Sabemos que um triângulo pitagórico de catetos a, b e hipotenusa c existe na esfera de raio $\frac{p}{\pi}$ se e só se $a, b, c \in \mathbb{N}$ é uma solução da equação

$$\cos \frac{qc}{p}\pi = \cos \frac{qa}{p}\pi \cos \frac{qb}{p}\pi.$$

Esta igualdade admite outra leitura: ela significa que existe um triângulo pitagórico com catetos qa, qb e hipotenusa qc na esfera de raio $\frac{p}{\pi}$. Mas a lista de tais triângulos nesta esfera é conhecida: pelo Teorema 4, tem-se

- ou $qa + qc = qb = p$, o que é impossível uma vez que $b \in \mathbb{N}$ mas $\frac{p}{q} \notin \mathbb{N}$;

- ou p é par e $qc = \frac{p}{2}$, o que, de novo, é inaceitável porque implicaria que $\frac{p}{q} = 2c \in \mathbb{N}$. \square

2.2.3 $R = \frac{\alpha}{\pi}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$

Resta-nos o problema de determinar os triângulos pitagóricos nas esferas de raio $R = \frac{\alpha}{\pi}$, para α irracional. De acordo com a alínea (3i) da Proposição 2, para a maioria de tais valores de α (isto é, no complementar de um conjunto numerável) a esfera correspondente não contém triângulos pitagóricos. No entanto, é fácil indicar exemplos de α para os quais a esfera respectiva tem algum triângulo pitagórico:

- I. O triângulo rectângulo de catetos 3, 5 e hipotenusa 4 mora numa (única) esfera, a de raio $R = \frac{\beta}{\pi} \simeq \frac{7.2943}{\pi}$, onde, tendo em atenção o que acabámos de provar na secção anterior, devemos ter β irracional.
- II. O triângulo com catetos 4, 5 e hipotenusa 3 existe na esfera de raio $R = \frac{\gamma}{\pi} \simeq \frac{6.8014}{\pi}$, e, por razão análoga, $\gamma \notin \mathbb{Q}$.

Evidência numérica (de que uma amostra consta da tabela seguinte) leva-nos a conjecturar que, quando α é irracional, a esfera de raio $\frac{\alpha}{\pi}$ tem no máximo um triângulo pitagórico.

<i>Catetos</i>	<i>Hipotenusa</i>	α
3, 4	1	4
3, 4	2	$\simeq 4.909749$
3, 4	3	6
3, 4	4	8
3, 5	2	5
3, 5	3	6
3, 5	4	$\simeq 7.2943$
3, 5	5	10
4, 5	1	5
4, 5	2	$\simeq 5.8744$
4, 5	3	$\simeq 6.8014$
4, 5	4	8
4, 5	5	10
4, 5	6	$\simeq 16.9559$

A apoiar esta suspeita está o facto de, se uma esfera de raio $R = \frac{\alpha}{\pi}$, com α irracional, tiver um triângulo pitagórico com catetos a, b e hipotenusa c ,

então não contém outros triângulos pitagóricos com os mesmos catetos ou os mesmos lados. De facto, como α é irracional, tem-se $\cos \frac{m}{\alpha}\pi \neq 0$ para qualquer natural m ; logo, se, por exemplo, as duas igualdades

$$\cos \frac{c}{\alpha}\pi = \cos \frac{a}{\alpha}\pi \cos \frac{b}{\alpha}\pi \quad \text{e} \quad \cos \frac{b}{\alpha}\pi = \cos \frac{a}{\alpha}\pi \cos \frac{c}{\alpha}\pi$$

se verificassem, concluiríamos, multiplicando-as e cancelando as repetições, que

$$\cos \frac{a}{\alpha}\pi = \pm 1$$

o que implicaria que ou $\frac{a}{\alpha}\pi = \pi$, logo $\alpha = a$, ou $\frac{a}{\alpha}\pi = 0$, sendo ambas as alternativas impossíveis. O argumento para tratar os outros casos é análogo.

3 Plano hiperbólico

Tal como na geometria esférica, os ternos pitagóricos admissíveis numa superfície de curvatura constante negativa (que designaremos por hiperbólica) estão obrigados a verificar uma condição análoga à do Teorema de Pitágoras [1].

Teorema 7 *Para cada triângulo rectângulo, de catetos a, b e hipotenusa c , numa superfície com curvatura negativa K , tem-se*

$$\cosh \frac{c}{R} = \left(\cosh \frac{a}{R} \right) \left(\cosh \frac{b}{R} \right) \quad (6)$$

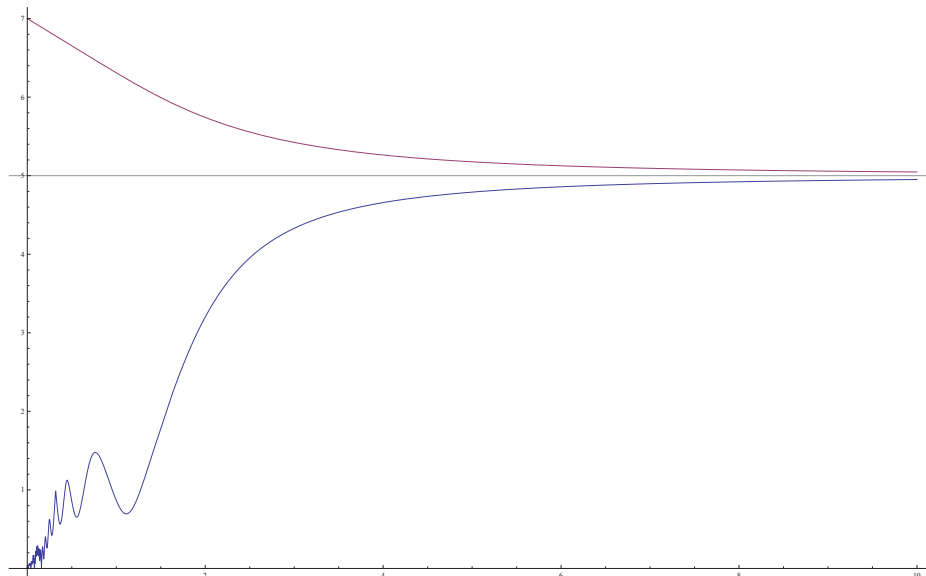
onde $R = \frac{1}{\sqrt{-K}}$.

Exemplo 2 Revisitemos o terno clássico, $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. O gráfico da aplicação

$$R > 0 \mapsto Ch_{34}(R) = R \operatorname{arccosh} \left(\cosh \frac{3}{R} \cosh \frac{4}{R} \right)$$

está representado na Figura 7, onde juntámos, para se compararem, os gráficos de \mathcal{C}_{34} (da geometria esférica) e da linha $c = 5$ (da geometria euclidiana). A função Ch_{34} é injectiva, aproxima-se de 7 quando R vai para 0 e os seus valores convergem para 5 quando R vai para $+\infty$. E portanto:

- Existe uma superfície hiperbólica com um triângulo pitagórico de catetos 3, 4 e hipotenusa 6.
- Nenhuma superfície hiperbólica pode conter um triângulo pitagórico com catetos 3, 4 e hipotenusa 5.

Figura 7: Gráfico de Ch_{34} .

Mais geralmente,

Proposição 8 *Fixemos um par de naturais a, b . Então:*

- (i) *A aplicação Ch_{ab} é estritamente decrescente.*
- (2i) $\lim_{R \rightarrow +\infty} Ch_{ab}(R) = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- (3i) $\lim_{R \rightarrow 0} Ch_{ab}(R) = a + b$.
- (4i) $\max\{a, b\} < Ch_{ab} < a + b$.

Note-se que, em particular, da análise das funções Ch_{34} , Ch_{45} e Ch_{35} , concluímos que nenhuma superfície hiperbólica pode conter um triângulo retângulo de lados 3, 4, 5. Além disso, tem-se:

Corolário 9

- (i) *Não existe superfície hiperbólica que contenha um triângulo pitagórico com um lado medindo 1.*
- (2i) *Dados naturais a e b , numa mesma superfície hiperbólica não há triângulos pitagóricos distintos tendo dois lados com comprimentos a e b .*

- (3i) *Existe uma superfície hiperbólica com um triângulo pitagórico de catetos $a, b \in \mathbb{N}$ se e só se $a, b > 1$.*

Prova:

- (i) Resulta de termos $b < \sqrt{1+b^2} < 1+b$.
- (2i) É consequência de a função Ch_{ab} ser estritamente decrescente.
- (3i) Existe uma superfície hiperbólica com um triângulo pitagórico de catetos $a, b \in \mathbb{N}$ se e só se $(a+b) - \sqrt{a^2+b^2} > 1$. Como, por (i), $a > 1$, esta condição é equivalente a ser $b > \frac{2a-1}{2(a-1)}$, cujas soluções em \mathbb{N} são os pares $a, b \in \mathbb{N}$ que verificam $a, b > 1$. \square

Como no Exemplo 2, uma vez fixados os catetos do triângulo, a análise da equação (6) permite decidir se há superfícies hiperbólicas que admitem tais triângulos, e provar que:

Proposição 10 *Dados naturais $a, b > 1$:*

- (i) *Existe uma (e uma só) superfície hiperbólica contendo um triângulo pitagórico com catetos de comprimentos a e b .*
- (2i) *Há exactamente $a+b - \lfloor \sqrt{a^2+b^2} \rfloor - 1$ triângulos pitagóricos hiperbólicos com catetos a e b , onde $\lfloor x \rfloor$ designa o maior inteiro menor ou igual a x .*

Sendo assim, podemos descrever cada triângulo pitagórico pelos comprimentos $a > 1$ e $b > 1$ dos catetos e $c = a+b-m$ da hipotenusa, onde

$$m \in \{1, 2, \dots, a+b - \lfloor \sqrt{a^2+b^2} \rfloor - 1\}.$$

Esta restrição nos valores de m merece um comentário. Quando $a = 2$, tem-se $a \leq b$ e o valor de m é obrigado a verificar as desigualdades

$$1 \leq m \leq 2+b - \lfloor \sqrt{4+b^2} \rfloor - 1 = 1+b - \lfloor \sqrt{4+b^2} \rfloor.$$

Como $b \geq 2$, vale $b < \sqrt{4+b^2} < b+1$, e portanto $b = \lfloor \sqrt{4+b^2} \rfloor$. Logo o único valor admissível para m é 1. Em resumo, os triângulos pitagóricos e hiperbólicos com um cateto de comprimento 2 têm catetos 2, b e hipotenusa $1+b$, qualquer que seja $b > 1$. Em geral, como

$$\max\{a, b\} \leq \lfloor \sqrt{a^2+b^2} \rfloor$$

tem-se

$$m \leq \min\{a-1, b-1\}.$$

Para $R > 0$, designemos por \mathcal{H}_R a superfície hiperbólica com curvatura constante negativa $K = -\frac{1}{R^2}$. Tal como no caso esférico, a maioria das superfícies hiperbólicas não contém triângulos pitagóricos:

Corolário 11

(i) Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$\{R > 0 : \mathcal{H}_R \text{ contém um triângulo pitagórico com lados } a, b, c\}$$

tem quando muito três elementos.

(2i) O conjunto $\{R > 0 : \mathcal{H}_R \text{ contém um triângulo pitagórico}\}$ é numerável.

Embora não possamos estabelecer precisamente quais os valores de R para os quais \mathcal{H}_R tem um triângulo pitagórico, há informação adicional sobre a sua localização em \mathbb{R} .

Teorema 12

(i) No plano hiperbólico \mathcal{H}_1 não há triângulos pitagóricos.

(2i) Se uma superfície hiperbólica \mathcal{H}_R tem um triângulo pitagórico com catetos a, b e hipotenusa $c = a + b - m$, então $R > \frac{m}{\ln(2)}$.

(3i) Seja $\mathcal{H}_{R_{a,b,m}}$ a superfície hiperbólica com um triângulo pitagórico de catetos a, b e hipotenusa $c = a + b - m$. Então

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} R_{a,b,m} = \frac{m}{\ln(2)}.$$

Prova:

(i) De acordo com o Teorema 7, no plano hiperbólico \mathcal{H}_1 existe um triângulo pitagórico com catetos $a, b > 1$ e hipotenusa $c = a + b - m$, onde m está no conjunto $\{1, 2, \dots, a + b - \lfloor \sqrt{a^2 + b^2} \rfloor - 1\}$, se e só se

$$\cosh(a + b - m) = \cosh a \cosh b$$

ou seja,

$$\frac{e^{a+b-m} + e^{-(a+b-m)}}{2} = \frac{e^a + e^{-a}}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2}$$

o que é equivalente a

$$e^{a+b-m} [2 - e^m - e^{-2a+m}] = e^{-(a+b-m)} [-2 + e^{-m} + e^{2a-m}].$$

O lado direito desta igualdade é sempre positivo uma vez que $2a - m \geq a + 1 \geq 3$. Pelo contrário, como $m \geq 1$, tem-se sempre $2 - e^m - e^{-2a+m} < 0$. E, portanto, a igualdade não é válida.

(2i) Suponhamos que num espaço hiperbólico \mathcal{H}_R existe um triângulo pitagórico com catetos $a, b > 1$ e hipotenusa $c = a + b - m$, onde $m \in \{1, 2, \dots, a + b - \lfloor \sqrt{a^2 + b^2} \rfloor - 1\}$. Então

$$\cosh \frac{a+b-m}{R} = \cosh \frac{a}{R} \cosh \frac{b}{R}$$

isto é,

$$\frac{e^{\frac{a+b-m}{R}} + e^{-\frac{a+b-m}{R}}}{2} = \left(\frac{e^{\frac{a}{R}} + e^{-\frac{a}{R}}}{2} \right) \cdot \left(\frac{e^{\frac{b}{R}} + e^{-\frac{b}{R}}}{2} \right)$$

ou seja,

$$2e^{\frac{a+b-m}{R}} + 2e^{-\frac{a+b-m}{R}} = e^{\frac{a+b}{R}} + e^{\frac{b-a}{R}} + e^{\frac{a-b}{R}} + e^{-\frac{a+b}{R}}$$

igualdade que pode ser simplificada para

$$e^{\frac{a+b-m}{R}} \left(2 - e^{\frac{m}{R}} - e^{-\frac{2a+m}{R}} \right) = e^{-\frac{a+b-m}{R}} \left(-2 + e^{-\frac{m}{R}} + e^{\frac{2a-m}{R}} \right). \quad (7)$$

Analisemos o sinal de $-2 + e^{-\frac{m}{R}} + e^{\frac{2a-m}{R}}$. Se designarmos $e^{\frac{1}{R}}$ por t , esta soma pode reescrever-se como

$$\frac{t^{2a} - 2t^m + 1}{t^m}.$$

O polinómio $\mathcal{Q}_{a,m} : x \in \mathbb{R} \mapsto x^{2a} - 2x^m + 1$ tem grau par e anula-se em $x = 1$. Além disso, a sua derivada

$$\mathcal{Q}'_{a,m} = \begin{cases} 2(ax^{2a-1} - 1) & \text{if } m = 1 \\ 2x^{m-1}(ax^{2a-m} - m) & \text{if } m > 1 \end{cases}$$

verifica $\mathcal{Q}'_{a,m}(1) = 2(a - m) > 0$ e as soluções da equação $\mathcal{Q}'_{a,m}(x) = 0$ são

$$\begin{cases} x = 0, x = \sqrt[m]{\frac{m}{a}} & \text{se } m \geq 1 \text{ e } m \text{ é ímpar} \\ x = 0, x = \sqrt[m]{\frac{m}{a}}, x = -\sqrt[m]{\frac{m}{a}} & \text{se } m > 1 \text{ e } m \text{ é par} \end{cases}.$$

Como $2^{a-m}\sqrt{\frac{m}{a}} < 1$, a informação anterior indica que $\mathcal{Q}_{a,m}$ é positiva em $]1, +\infty[$, onde estão todos os valores de $t = e^{\frac{1}{R}}$. Consequentemente, um tal R tem de satisfazer a desigualdade

$$2 - e^{\frac{m}{R}} - e^{\frac{-2a+m}{R}} > 0.$$

Como $e^{\frac{m}{R}}(1 + e^{\frac{-2a}{R}}) > e^{\frac{m}{R}}$, é assim necessário que se verifique $2 > e^{\frac{m}{R}}$, daí que deva ser $R > \frac{m}{\ln(2)}$.

(3i) Voltemos à igualdade (7). Ela pode ser reescrita como

$$e^{2(\frac{a+b-m}{R})} \left(2 - e^{\frac{m}{R}} - e^{\frac{-2a+m}{R}} \right) = -2 + e^{-\frac{m}{R}} + e^{\frac{2a-m}{R}}$$

isto é,

$$e^{\frac{2b}{R}} = \frac{-2 + e^{-\frac{m}{R}} + e^{\frac{2a-m}{R}}}{\left(2 - e^{\frac{m}{R}} - e^{\frac{-2a+m}{R}} \right) e^{\frac{2a-2m}{R}}}$$

expressão que determina b uma vez dados a , m e R . O estudo da aplicação

$$R > 0 \mapsto \frac{-2 + e^{-\frac{m}{R}} + e^{\frac{2a-m}{R}}}{\left(2 - e^{\frac{m}{R}} - e^{\frac{-2a+m}{R}} \right) e^{\frac{2a-2m}{R}}} - e^{\frac{2b}{R}}$$

revela que, fixados m e b , o seu único zero, digamos $R_{a,b,m}$, é função decrescente de a . Uma vez que já sabemos que $R_{a,b,m} > \frac{m}{\ln(2)}$ para cada escolha de a , b e m , o limite

$$\ell_{b,m} = \lim_{a \rightarrow +\infty} R_{a,b,m}$$

existe, é finito e maior ou igual a $\frac{m}{\ln(2)}$. E, portanto, de

$$e^{\frac{2b-m}{R}} \left(2 - e^{\frac{m}{R}} - e^{\frac{-2a+m}{R}} \right) = \frac{-2 + e^{-\frac{m}{R}} + e^{\frac{2a-m}{R}}}{e^{\frac{2a-m}{R}}},$$

obtemos, quando $a \rightarrow +\infty$,

$$e^{\frac{2b-m}{\ell_{b,m}}} \left(2 - e^{\frac{m}{\ell_{b,m}}} \right) = 1.$$

O que significa que $e^{\frac{1}{\ell_{b,m}}}$ é um zero do polinómio $\mathcal{P}_{b,m}(x) = x^{2b} - 2x^{2b-m} + 1$.

Lema 13 $\forall m \geq 1 \quad \frac{2b-m}{b} < e^{\frac{m}{\ell_{b,m}}} \leq 2$.

Prova: Começemos com $m = 1$. Já sabemos que $\ell_{b,1}$ é maior ou igual a $\frac{1}{\ln(2)}$, logo $e^{\frac{1}{\ell_{b,1}}} \leq 2$. O polinómio $\mathcal{P}_{b,1}(x) = x^{2b} - 2x^{2b-1} + 1$ tem pelo menos dois zeros, 1 e $e^{\frac{1}{\ell_{b,1}}}$, e a sua derivada, $2x^{2b-2}(bx - (2b-1))$, anula-se precisamente em $x_1 = 0$ e em $x_2 = \frac{2b-1}{b}$. Neste último valor, o polinómio atinge um máximo global e, como $x_2 > 1$ e $\mathcal{P}'(1) = 2(1-b) < 0$, o mínimo $\mathcal{P}(x_2)$ é negativo. Desse modo, $e^{\frac{1}{\ell_{b,1}}} > x_2$. Um argumento análogo funciona quando $m > 1$. Uma vez que $\ell_{b,m} \geq \frac{m}{\ln(2)}$, tem-se $e^{\frac{m}{\ell_{b,m}}} \leq 2$. O polinómio $\mathcal{P}(x) = x^{2b} - 2x^{2b-m} + 1$, com grau par e pelo menos dois zeros, 1 e $e^{\frac{1}{\ell_{b,m}}}$, tem derivada $2x^{2b-m-1}(bx^m - (2b-m))$, que se anula em $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[m]{\frac{2b-m}{b}} > 1$ e, se m é par, em $x_3 = -\sqrt[m]{\frac{2b-m}{b}}$. Como $\mathcal{P}'(1) = 2(m-b) < 0$, o valor mínimo global, atingido em x_2 , é negativo. E, portanto, $e^{\frac{1}{\ell_{b,m}}} > x_2$. \square

Deste lema deduzimos finalmente que

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} R_{a,b,m} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ell_{b,m} = \frac{m}{\ln(2)}. \quad \square$$

Comentário 13 O limite anterior é compatível com o contexto que estamos a estudar. De facto, dados $a_0, b_0 > 1$ e m_0 satisfazendo

$$m_0 \in \{1, 2, \dots, a_0 + b_0 - \lfloor \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \rfloor - 1\}$$

há infinitos valores admissíveis para a e b , uma vez que:

- o A condição $1 \leq m_0$ força b a satisfazer a desigualdade

$$1 \leq a_0 - 1 + b - \lfloor \sqrt{a_0^2 + b^2} \rfloor,$$

ou seja,

$$a_0 - 2 + b \geq \lfloor \sqrt{a_0^2 + b^2} \rfloor.$$

Quando $a_0 = 2$, já verificámos que m_0 tem de ser 1, e portanto qualquer $b \geq 2$ é permitido. Se $a_0 > 2$, a restrição anterior é válida se

$$a_0 - 2 + b \geq \sqrt{a_0^2 + b^2},$$

isto é, se

$$b \geq \frac{2(a_0 - 1)}{a_0 - 2}.$$

- o Os valores de b têm também de garantir que a desigualdade

$$m_0 \leq a_0 - 1 + b - \lfloor \sqrt{a_0^2 + b^2} \rfloor$$

é válida. Ora, se $m_0 = a_0 - 1$, então $b_0 = \lfloor \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \rfloor$, logo, $a_0^2 < 2b_0 + 1$, e portanto basta exigir que $b > b_0$. Se $m_0 < a_0 - 1$, a condição $m_0 \leq a_0 - 1 + b - \lfloor \sqrt{a_0^2 + b^2} \rfloor$ está assegurada desde que $m_0 \leq a_0 - 1 + b - \sqrt{a_0^2 + b^2}$, ou seja, se

$$b \geq \frac{(1 + m_0)[2a_0 - 1 - m_0]}{2(a_0 - 1 - m_0)}.$$

Comentário 14 Não determinámos quantos triângulos pitagóricos co-existem num mesmo espaço hiperbólico. De novo, os dados numéricos sugerem que apenas um tal triângulo pode ser encontrado em cada \mathcal{H}_R .

<i>Catetos</i>	<i>Hipotenusa</i>	<i>R</i>
3, 3	5	$\simeq 1.5247$
3, 4	6	$\simeq 1.49$
4, 4	6	$\simeq 4.3582$
4, 4	7	$\simeq 1.46$
3, 5	6	$\simeq 5.9281$
3, 5	7	$\simeq 1.482$
4, 5	7	$\simeq 3.6796$
4, 5	8	$\simeq 1.4533$
5, 5	8	$\simeq 3.295$
5, 5	9	$\simeq 1.4468$

Este artigo foi elaborado no âmbito do Programa *Novos Talentos em Matemática*, da Fundação Calouste Gulbenkian. Os autores agradecem a José Carlos Santos (Departamento de Matemática – FCUP) pelas três primeiras figuras e ao revisor pela leitura atenta da primeira versão deste texto.

Referências

- [1] H. S. M. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry*, Univ. Toronto Press, 1968.
- [2] W. Sierpinski, *Elementary Theory of Numbers*, North-Holland, PWN-Polish Scientific Publishers, 1988.

